



Vom Telegrafenkabel zum Abtasttheorem

Die Vorgeschichte des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems

Wer ein digitales Oszilloskop benutzt, kennt die Faustregel: mindestens doppelt so schnell abtasten wie die höchste vorkommende Frequenz. Das zugehörige Theorem trägt meist die Namen Nyquist und Shannon. Seine Geschichte beginnt aber weder beim Abtasten noch bei einer einzelnen Person, sondern bei einer sehr handfesten Frage der 1920er Jahre: Wie schnell kann man über eine Leitung telegrafieren?

Die Ausgangsfrage: Wie schnell kann man telegrafieren?

In den 1920er Jahren war die Telegrafie das Rückgrat der Fernkommunikation. Seekabel waren teuer, und um eine Leitung besser auszunutzen, legte man mit der Trägerfrequenztelegrafie mehrere Telegrafiekkanäle in getrennte Frequenzbänder derselben Leitung. Damit stand jedem Kanal nur eine begrenzte Bandbreite zur Verfügung, und es stellte sich die Frage, wie viele Zeichen pro Sekunde ein solcher Kanal verkraftet, bevor sich die Impulse gegenseitig verschmieren.

Harry Nyquist, Ingenieur bei AT&T und später den Bell Laboratories, ging dieser Frage in zwei Arbeiten nach, 1924 über die Faktoren der Telegrafiergeschwindigkeit und 1928 über die Theorie der Telegrafienübertragung. Sein zentrales Ergebnis: Über einen Kanal der Bandbreite B lassen sich höchstens

$$r_{\max} = 2B$$

unabhängige Impulse pro Sekunde übertragen. Nyquist zeigte außerdem, wie die Impulse geformt sein müssen, damit sie sich an den Abtastzeitpunkten des Empfängers nicht gegenseitig stören. Dieses Nyquist-Kriterium steckt bis heute in jedem Raised-Cosine-Filter eines QAM-Modems.

Zur gleichen Zeit kam Karl Küpfmüller in Deutschland mit seinen Untersuchungen über Einschwingvorgänge in Wellenfiltern zu einem gleichwertigen Zusammenhang: Die Zeit, die ein bandbegrenztes System zum Einschwingen braucht, ist umgekehrt proportional zu seiner Bandbreite. Ralph Hartley, ebenfalls bei Bell, machte 1928 daraus ein erstes Maß für Information, das mit Bandbreite und Übertragungsdauer wächst.

Wichtig für das Verständnis: Nyquist hat eine Aussage über das *Senden* von Impulsen gemacht, nicht über das Abtasten und Wiedergewinnen eines analogen Signals. Mathematisch sind das zwei Seiten derselben Medaille. Ausgesprochen hat Nyquist die zweite Seite jedoch nicht.

Und das Morsen?

Die Verbindung zu Morsezeichen ist nicht falsch, nur etwas verschoben. Der Ausgangspunkt war die Telegrafie der 1920er Jahre, mit Morse- und Fernschreibzeichen, und zwar überwiegend auf Leitungen und Kabeln. Der Funk kommt ausdrücklich erst bei Kotelnikow ins Spiel, dessen Arbeit von 1933 sich im Titel auf den „Äther“ und den Draht bezieht. In den 1940er Jahren ging es dann gar nicht mehr um Telegrafie, sondern um digitalisierte Sprache.

Die Mathematik war schon da

Die Rekonstruktion einer Funktion aus gleichabständigen Stützwerten hatte der britische Mathematiker Edmund Taylor Whittaker bereits 1915 untersucht. Seine „Kardinalfunktion“ ist genau die Interpolationsformel, die wir heute mit dem Abtasttheorem verbinden: Ein auf $f_{\max}$ bandbegrenztetes Signal ist durch Abtastwerte im Abstand T vollständig bestimmt, sofern

$$f_A > 2f_{\max} \quad T = \frac{1}{f_A}$$

gilt. Es lässt sich dann als Summe verschobener sinc-Impulse zurückgewinnen, die jeweils mit einem Abtastwert gewichtet sind:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \quad \operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

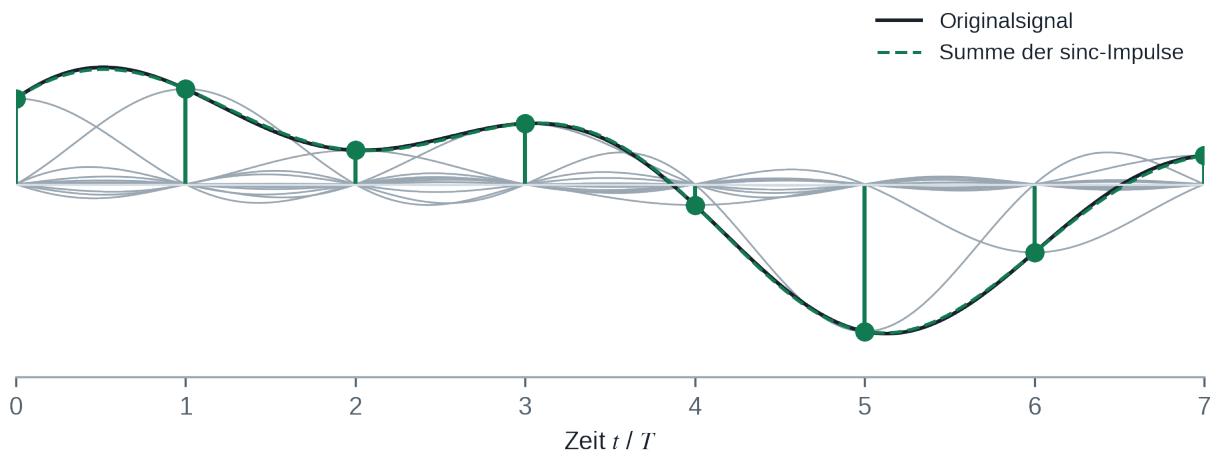


Bild 1 – Rekonstruktion aus Abtastwerten. Jeder Abtastwert trägt einen sinc-Impuls (grau) bei, der an allen anderen Abtastzeitpunkten null ist. Die Summe (grün gestrichelt) deckt sich mit dem Originalsignal.

Sein Sohn John Macnaghten Whittaker führte die Theorie in den 1920er und 1930er Jahren weiter. Für die Nachrichtentechnik blieb das zunächst folgenlos, denn die Arbeiten erschienen in mathematischen Zeitschriften, die kaum ein Ingenieur las.

Kotelnikow und Raabe: das Theorem in der Nachrichtentechnik

Als Satz der Nachrichtentechnik formuliert hat das Abtasttheorem zuerst der sowjetische Ingenieur Wladimir Kotelnikow im Jahr 1933, in einem Beitrag zu einer Konferenz über den Neuaufbau des

Fernmeldewesens. Er stellte klar, dass ein bandbegrenztes Signal durch seine Abtastwerte vollständig beschrieben ist, und leitete daraus ab, wie viele Kanäle sich über Funk und Leitung unterbringen lassen. Im Westen blieb die Arbeit bis in die 1950er Jahre praktisch unbekannt. 1999 erhielt Kotelnikow dafür den Grundlagenpreis der Eduard-Rhein-Stiftung.

In Deutschland verwendete Herbert Raabe den Zusammenhang 1939 in seiner Berliner Dissertation zur Zeitmultiplexübertragung. Dabei werden mehrere Fernsprechanäle abwechselnd abgetastet und über eine gemeinsame Leitung geschickt, was nur funktioniert, wenn die Abtastrate zur Bandbreite passt. Im deutschen Sprachraum spricht man deshalb gelegentlich vom WKS-Abtasttheorem, nach Whittaker, Kotelnikow und Shannon.

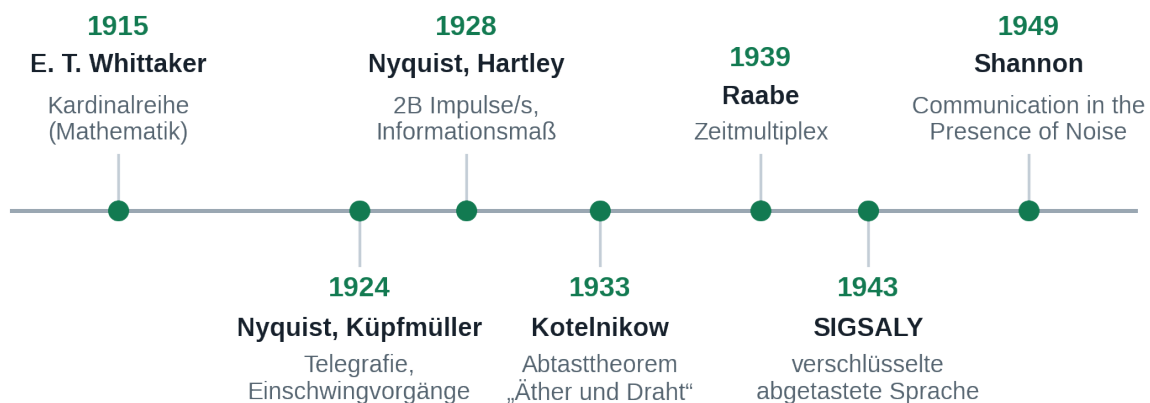


Bild 2 – Zeitleiste der wichtigsten Beiträge zwischen 1915 und 1949.

Die 1940er Jahre: Sprache statt Morsezeichen

Den nächsten Schub brachte die Digitalisierung der Sprache. Alec Reeves hatte 1937/38 die Pulscodemodulation erfunden, bei der Sprache abgetastet, quantisiert und als Zahlenfolge übertragen wird. Im Zweiten Weltkrieg entstand bei den Bell Laboratories das Sprachverschlüsselungssystem SIGSALY, das ab 1943 die Gespräche zwischen Washington und London schützte. Es zerlegte Sprache in Frequenzbänder, tastete deren Pegel ab, quantisierte sie und verschlüsselte sie mit einem Einmalschlüssel. Wer so etwas baut, muss wissen, wie oft er abtasten muss.

Claude Shannon arbeitete während des Krieges bei Bell an Kryptografie und Feuerleitung. Nach dem Krieg veröffentlichte er 1948 „A Mathematical Theory of Communication“ und 1949 „Communication in the Presence of Noise“. In der zweiten Arbeit steht das Abtasttheorem in der Form, die sich durchgesetzt hat. Shannon selbst beanspruchte es nicht als Entdeckung: Er bezeichnete die Aussage als unter Nachrichtentechnikern bekannt und nannte den Abtastabstand $1/(2B)$ zu Ehren Nyquists das „Nyquist-Intervall“.

Shannons eigentliche Leistung war die Einordnung. Aus dem Abtasttheorem folgt, dass ein auf B bandbegrenztes Signal der Dauer T nur etwa

$$N \approx 2BT$$

Freiheitsgrade hat. Ein Signal ist damit im Grunde ein Punkt in einem Raum mit endlich vielen Dimensionen, also eine Liste von Zahlen. Auf dieser geometrischen Sicht baut seine berühmte Formel für die Kapazität eines verrauschten Kanals auf:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Hier schließt sich der Kreis zu Nyquist und Hartley: Die Bandbreite legt fest, wie viele Werte pro Sekunde man unterbringt, der Rauschabstand, wie fein man sie unterscheiden kann.

Warum heißt es dann „Nyquist“?

Der Name ist eine nachträgliche Zuschreibung. Über Shannons „Nyquist-Intervall“ wanderte Nyquists Name auf die Abtastrate und schließlich auf das ganze Theorem. Das ist ein typischer Fall in der Wissenschaftsgeschichte: Eine Entdeckung wird selten nach der Person benannt, die sie zuerst gemacht hat, sondern nach der, die sie bekannt gemacht hat, oder nach einer, deren Name gerade nahelag.

Was das für die Messpraxis bedeutet

Die Bedingung $f_A > 2f_{\max}$ gilt für ideal bandbegrenzte Signale und ideale Filter. Reale Anti-Aliasing-Filter haben endliche Flanken, deshalb tasten digitale Oszilloskope typischerweise deutlich schneller ab als mit der doppelten Bandbreite, und die sinc-Interpolation der Darstellung entspricht genau der Formel oben.

Wird die Bedingung verletzt, erscheinen höhere Frequenzen gespiegelt als scheinbar niedrigere, das bekannte Aliasing. Umgekehrt nutzt die Bandpassabtastung das gezielt aus: Entscheidend ist dort nicht die höchste Frequenz, sondern die Breite des belegten Bandes.

Literatur

- E. T. Whittaker: On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. Proc. Royal Society of Edinburgh 35 (1915), S. 181–194.
- H. Nyquist: Certain factors affecting telegraph speed. Bell System Technical Journal 3 (1924), S. 324–346.
- K. Küpfmüller: Über Einschwingvorgänge in Wellenfiltern. Elektrische Nachrichtentechnik 1 (1924).
- H. Nyquist: Certain topics in telegraph transmission theory. Transactions of the AIEE 47 (1928), S. 617–644.
- R. V. L. Hartley: Transmission of information. Bell System Technical Journal 7 (1928), S. 535–563.
- V. A. Kotelnikow: Über die Übertragungskapazität des „Äthers“ und des Drahtes in der Elektrokommunikation (russ.). Konferenzmaterialien, Moskau 1933.
- H. Raabe: Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachübertragung (Multiplexübertragung). Elektrische Nachrichtentechnik 16 (1939), S. 213–228.
- C. E. Shannon: A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal 27 (1948), S. 379–423 und 623–656.
- C. E. Shannon: Communication in the presence of noise. Proceedings of the IRE 37 (1949), S. 10–21.
- H. D. Lüke: The origins of the sampling theorem. IEEE Communications Magazine 37 (1999), Nr. 4, S. 106–108.